Mecánica Clásica II

Tema 4: Relatividade especial

José M. Sánchez de Santos
Departamento de Física de Partículas
Facultade de Física
USC

Notas de clase da materia Mecánica Clásica II do Grao en Física da USC

Índice

1. Postulados e transformacións de Lorentz

1.1. Introdución

O principio de relatividade da mecánica newtoniana establece que todos os sistemas inerciais son igualmente válidos para describir as leis da Física. As transformacións que permiten o paso dun sistema inercial a outro son as transformacións de Galileo.

Pero os físicos do século XIX non eran quen de encaixar nese principio a teoría electromagnética, que semellaba non o satisfacer. A teoría clásica do electromagnetismo resúmese nas ecuacións de Maxwell (1861) e unha das súas consecuencias é que a velocidade da luz (as ondas electromagnéticas) no baleiro é independente do movemento da fonte, en contradición coas transformacións de Galileo. Dito doutro xeito, para os fenómenos electromagnéticos non todos os sistemas inerciais son equivalentes: as ecuacións de Maxwell non son invariantes baixo transformacións de Galileo. Se tentamos de conciliar ambas cousas á vez, isto implicaría que existe un sistema de referencia preferido, no cal as ecuacións de Maxwell son válidas, non o sendo noutros sistemas. Existen entón varias posibles solucións ó problema:

a) As ecuacións de Maxwell non son correctas, pero si as transformacións de Galileo.

b) As ecuacións de Maxwell son correctas en calquera sistema inercial, daquela o que non é correcto son as transformacións de Galileo.

c) As ecuacións de Maxwell son correctas nun sistema de referencia preferido (o Éter) e hainas modificar para que o sexan noutro sistema inercial.

Hoxe en día sabemos que a solución correcta é a b). A solución a) foi descartada, xa que o intento de modificar as ecuacións de Maxwell para facelas invariantes de Galileo levaría a fenómenos que non se observan experimentalmente. A solución c) abandonouse só despois de moitos experimentos que trataban de detectar a existencia do éter. Segundo Young e Fresnel, a luz sería coma unha onda mecánica que necesita dun medio para propagarse (o éter). O sistema no cal este medio é estacionario sería o sistema de referencia distinguido. De acordo coa lei de suma de velocidades de Galileo debería ser posible medir a variación da velocidade da luz emitida por unha fonte en movemento respecto ó éter. Un dos experimentos máis célebres na historia da Física foi o de Michelson e Morley de 1887 que intentaba medir estas variacións na velocidade da luz cando esta viaxa en distintas direccións respecto do movemento relativo da Terra na súa órbita. Para iso empregaron un interferómetro, esperando poder medir a diferenza de camiño óptico entre raios de luz que seguen traxectorias perpendiculares. O resultado do experimento foi negativo. Descartada a existencia do éter, Einstein formulou en 1905 os dous postulados da teoría especial da relatividade.

1.2. O experimento de Michelson e Morley

Realizouse cun interferómetro coma o da figura:

O dispositivo está composto dunha fonte S, un espello semiprateado A e dos espellos B e C. Os espellos están situados a distancias L_1 e L_2 de A. A luz sae de S e en A divídese en dous feixes. Un deles, vai cara a B e reflíctese nel, e analogamente faino o outro en C. Ao chegaren de novo a A, ambos feixes recombínanse e superpóñense. Se o tempo investido en ir de A a B e volver é o mesmo tempo que o de ir de A a C e volver, os dous feixes estarán en fase e reforzaranse o un ao outro. Se o tempo é distinto, os feixes estarán desfasados e haberá interferencia. Calcularemos estas diferenzas de tempo, tendo en conta o suposto movemento relativo ao éter.

Supoñamos que a liña AB é paralela ó movemento da Terra na súa órbita e que esta se move a velocidade u. Sexa c a velocidade da luz respecto ao éter. No tramo de ida, a velocidade da luz relativa á Terra é $v = c - u$, polo que o tempo investido é $t_{AB} = \frac{L_1}{c-u}$ No camiño de volta, $v = c + u$, e $t_{BA} = \frac{L_1}{c+u}$, de xeito que o tempo total en ir e volver é:

$$t_{ABA} = \frac{L_1}{c-u} + \frac{L_1}{c+u} = \frac{2L_1/c}{1-u^2/c^2}.$$

Calculemos agora o tempo ó longo do outro brazo do interferómetro. Mentres o feixe de luz viaxa de A cara a C, C terase movido a C' unha distancia $c = ut_{AC}$ e a luz percorrerá unha distancia ct_{AC} como se aprecia na figura.

E similarmente para o percorrido de volta. Usando o teorema de Pitágoras temos que $L_2^2 + u^2 t_{AC}^2 = c^2 t_{AC}^2$ e, por tanto:

$$t_{AC} = \frac{L_2/c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},$$

polo que:

$$t_{ACA} = 2t_{AC} = \frac{2L_2/c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

A diferenza entre os tempos ao longo dun e doutro brazo será:

$$\begin{aligned}
\Delta t = t_{ABA} - t_{ACA} &= \frac{2L_1/c}{1-u^2/c^2} - \frac{2L_2/c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \\
&= \frac{2L_1}{c}\left(1+\frac{u^2}{c^2}+\cdots\right) - \frac{2L_2}{c}\left(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}+\cdots\right) = \\
&= \frac{2(L_1-L_2)}{c} + \left(\frac{2L_1-L_2}{c}\right)\left(\frac{u^2}{c^2}\right)+\cdots
\end{aligned}$$

Onde usamos a expansión de Taylor a primeira orde para $\frac{u^2}{c^2} \to 0$. Esta diferenza Δt segue sendo non nula aínda no caso en que fose $L_1 = L_2$, é de orde $\frac{u^2}{c^2}$.

Na práctica o que se fai é cambiar de posición o interferómetro, rotándoo 90° de xeito que $B \leftrightarrow C$ e $L_1 \leftrightarrow L_2$, de xeito que a diferenza entre os tempos empregados polos dous feixes perpendiculares de luz é agora:

$$\begin{aligned}
\Delta t' = t'_{ACA} - t'_{ABA} &= \frac{2L_1/c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \frac{2L_2/c}{1-u^2/c^2} = \\
&= \frac{2(L_1-L_2)}{c} + \left(\frac{L_1-2L_2}{c}\right)\left(\frac{u^2}{c^2}\right)+\cdots
\end{aligned}$$

Nambolosdous casos existirá un patrón de interferencia e do que se trata é de comparalos (de feito, a rotación pode facerse de maneira continua e ir variando gradualmente dito patrón de interferencia). A diferenza de camiño relativa é: $\Delta d = c(\Delta t - \Delta t') = (L_1 + L_2)\frac{u^2}{c^2}$. Cando $\Delta d = n\frac{\lambda}{2}$, o desprazamento relativo será de media franxa de interferencia e nun dos patróns haberá bandas luminosas cando no outro eran escuras e viceversa. Se $\Delta d = n\lambda$, o desprazamento é dunha lonxitude de onda completa e ambos patróns serán indistinguibles. En xeral, o corremento dunha fracción δ de franxas de interferencia $\Delta d = \delta\lambda$ virá dado entón por

$$\delta = \frac{\Delta d}{\lambda} = \frac{(L_1+L_2)}{\lambda}\frac{u^2}{c^2}$$

No experimento realizado inicialmente por Michelson en 1881, a luz era xerada por unha lámpada de sodio con $\lambda = 6 \times 10^{-7}$m, os brazos do interferómetro medían $L_1 = L_2 = 1{,}2$m, e tendo en conta que a velocidade da Terra na súa órbita é $v = 30$ km/s, o resultado agardado sería $\delta = 0{,}04$. O resultado do experimento foi negativo, pero o seu deseño permitía unha precisión relativamente mala de $\delta = 0{,}02$. Uns anos máis tarde, en 1887, o propio Michelson, en colaboración con Morley, conseguiu aumentar de maneira efectiva a lonxitude dos brazos do interferómetro mediante un sistema de reflexións múltiples dos feixes de luz ata $L_1 = L_2 = 11$ m, co cal a precisión experimental melloraba nunha orde de magnitude ata $\delta = 0{,}4$. Aínda así, o resultado do experimento seguiu sendo negativo e ningunha variación das velocidades con respecto ó éter puido ser detectada.

1.3. Os postulados da relatividade especial

Vendo que as ecuacións de Maxwell son correctas e que a existencia do éter queda descartada experimentalmente, debe entón atoparse outra explicación. Poincaré suxeriu que o experimento de Michelson e Morley era unha manifestación do principio xeral de que o movemento absoluto non pode detectarse e que as leis da Física son as mesmas en calquera sistema inercial. Ademais, como as ecuacións de Maxwell inclúen a velocidade da luz c, que debe ser a mesma en calquera sistema, hai que revisar o concepto de velocidade relativa cando se aplica á luz. Lorentz achegouse moito a formular a teoría da relatividade e, de feito, formulou as transformacións que levan o seu nome e baixo as que as ecuacións de Maxwell son invariantes cando se cambia de sistema inercial, substituíndo ás transformacións de Galileo. Einstein desenvolveu a teoría da relatividade especial en 1905 a partir de dous postulados básicos:

1) **Principio de relatividade:** As leis da Física son as mesmas en calquera sistema inercial. Non existe un sistema inercial preferido (éter ou sistema en repouso absoluto).

2) **Principio de constancia da velocidade da luz:** A velocidade da luz no baleiro é unha constante universal, independente de calquera movemento da fonte ou do observador (é a mesma en calquera sistema inercial).

O principio 1) ou principio de relatividade é a base fundamental da teoría. O 2) de constancia da velocidade da luz é unha consecuencia do 1) se aceptamos que as ecuacións de Maxwell son leis fundamentais da Física.

1.4. Transformacións de Lorentz

Sexan dous sistemas inerciais S e S' cos seus eixos paralelos. Non perdemos xeneralidade se supoñemos que o movemento relativo é na dirección x_1, sendo u a velocidade de S' con respecto a S. Definimos $t = t' = 0$ no instante no que as orixes de ambos sistemas O e O' coinciden.

A transformación de Galileo é:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 - ut \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \\ t' &= t \end{aligned}$$

Para un raio de luz que se envía dende a orixe en $t = 0$ na dirección x_1 temos:

$$\begin{aligned} \text{En S} &: \quad x_1 = ct \\ \text{En S}' &: \quad x'_1 = c't' = c't \end{aligned}$$

E polo tanto, a transformación de Galileo é $c't = ct - ut$, chegando á conclusión de que a velocidade da luz se transforma segundo $c' = c - u$ ou $c = u + c'$, en contradición co postulado 2). Buscamos unha transformación máis xeral. Fagamos a hipótese de que dita transformación é linear (a de Galileo éo, e será un caso límite da que buscamos).

- *Coordenadas transversas:* dado que o movemento é na dirección x_1, calquera suceso con $x'_2 = 0$ ten que ter $x_2 = 0$ polo que simultaneamente debe ser $x'_2 = kx_2$ e $x_2 = kx'_2$. Por simetría, $k = 1$ e por tanto $x'_2 = x_2$. Analogamente, $x'_3 = x_3$.
- *Coordenada lonxitudinal:* supoñamos a transformación linear: $x'_1 = ax_1 + bt$. O punto O' ten $x'_1 = 0$, $x_1 = ut$, polo que $0 = aut + bt$ e $b = -au$, quedando a transformación:

  $$x'_1 = a(x_1 - ut). \tag{1}$$

  Por simetría, é dicir, intercambiando:

  $$\begin{aligned} x_1 &\leftrightarrow x'_1 \\ t &\leftrightarrow t' \\ u &\leftrightarrow -u \end{aligned}$$

  e utilizando o postulado 1):

  $$x_1 = a(x'_1 + ut'). \tag{2}$$

  Usemos agora o postulado 2). Para o raio de luz emitido en $t = 0$ temos que:

  $$\begin{aligned} x_1 &= ct \\ x'_1 &= ct' \end{aligned}$$

xa que a velocidade da luz é a mesma nambolosdous sistemas. Substituíndo en (1) e (2):

$$ct' = a(ct - ut)$$
$$ct = a(ct' + ut'),$$

de onde, eliminando t e t' temos que

$$\frac{a(c-u)}{c} = \frac{c}{a(c+u)}$$

e polo tanto:

$$a = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

A transformación para as coordenadas lonxitudinais queda entón:

$$x_1' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(x_1 - ut)$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(x_1' + ut')$$

- *Coordenada temporal:*

  Eliminando x_1' (ou x_1) das ecuacións anteriores:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(x_1 - ut) + ut\right]$$

  podemos obter as transformacións para a variable temporal:

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(t - \frac{u}{c^2}x_1)$$

  e tamén

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(t' + \frac{u}{c^2}x_1').$$

Resumindo, se definimos:

$$\beta = \frac{u}{c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

temos o seguinte conxunto de *transformacións de Lorentz*:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \frac{\beta}{c}x_1) \\ x'_1 &= \gamma(x_1 - \beta ct) \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3, \end{aligned}$$

e, por simetría:

$$\begin{aligned} t &= \gamma(t' + \frac{\beta}{c}x'_1) \\ x_1 &= \gamma(x'_1 + \beta ct') \\ x_2 &= x'_2 \\ x_3 &= x'_3. \end{aligned}$$

O parámetro β, que non é máis que a velocidade da luz en unidades de c ten que ser $\beta < 1$ para que as transformacións teñan sentido, é dicir $u < c$. De feito, para $u \ll c$, $\beta \to 0$, $\frac{\beta}{c} \to 0$, con $\beta c = u$ finita, resulta que $\gamma \to 1$ e as transformacións redúcense a:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x'_1 &= x_1 - ut \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3, \end{aligned}$$

e a súa inversa, que son as *transformacións de Galileo.*

Como as transformacións son lineares, as diferenzas entre a posición e os tempos de dous *sucesos* A e B transforman da mesma maneira que as coordenadas. Se $\Delta x = x_B - x_A$ e $\Delta x' = x'_B - x'_A$:

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x_1) \\ \Delta x'_1 &= \gamma(\Delta x_1 - \beta c\Delta t). \end{aligned}$$

Omitimos as direccións transversas xa que non transforman.

Dous sucesos que suceden no mesmo instante (aínda que non necesariamente no mesmo lugar) chámanse *simultáneos* ($\Delta t = 0$). Analogamente, dous sucesos no mesmo lugar (pero non necesariamente no mesmo instante) son *colocais* ($\Delta x = 0$). Os sucesos simultáneos e colocais á vez son *coincidentes* ($\Delta t = \Delta x = 0$). Pero veremos que os conceptos de colocalidade e simultaneidade non teñen significado universal: dependen do observador.

1.5. Relatividade da colocalidade: dilatación temporal

No caso non relativista, a transformación de Galileo:

$$\Delta x' = \Delta x - u\Delta t, \quad \Delta t' = \Delta t$$

fai que dous sucesos que son colocais no sistema S' ($\Delta x' = 0$) non o sexan no sistema S ($\Delta x = u\Delta t \neq 0$). Por exemplo, unha persoa viaxando nun tren queda durmida e esperta un certo tempo máis tarde $\Delta t' \neq 0$ no mesmo lugar ($\Delta x' = 0$) (o seu asento) no sistema do tren (S'). Non obstante, faino en estacións distintas separadas unha distancia $\Delta x = u\Delta t \neq 0$ para o observador en terra (S).

No caso relativista chegamos a unha conclusión semellante usando as transformacións de Lorentz:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t)$$
$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{\beta}{c}\Delta x)$$

Para dous sucesos colocais en S', $\Delta x' = 0$, a tempos distintos $\Delta t' \neq 0$: $\Delta x = \beta c\Delta t$ e $\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{\beta}{c}\beta c\Delta t) = \gamma(1-\beta^2)\Delta t = \sqrt{1-\beta^2}\Delta t = \frac{1}{\gamma}\Delta t$, ou sexa:

$$\Delta t = \gamma\Delta t' > \Delta t',$$

a diferenza do caso non relativista. Esta relación é a expresión da *dilatación temporal*: o intervalo temporal medido por un observador calquera sempre é *maior* que para aquel no que os sucesos son colocais (o que chamaremos *tempo propio*).

Se os sucesos son os «tics» dun reloxo, o intervalo entre eles é máis grande para un observador que se move respecto ao reloxo que para aquel que o ve en repouso e polo tanto o reloxo vai máis a modo: *os reloxos en movemento atrasan.*

1.6. Relatividade da simultaneidade: causalidade

Da transformación de Lorentz para o intervalo temporal:

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{\beta}{c}\Delta x')$$

vemos que se dous sucesos son simultáneos en S' ($\Delta t' = 0$), entón $\Delta t = \frac{\gamma\beta}{c}\Delta x' \neq 0$ e non o serán en S, salvo que sexan colocais, claro, caso en que serán coincidentes para todos os sistemas. De feito, dependendo de si $\Delta x' > 0$ ou $\Delta x' < 0$, un dos eventos pode suceder antes ou despois que o outro. Este efecto de relatividade da simultaneidade non sucede no caso non relativista, pois as coordenadas temporais non se modifican nas transformacións de Galileo.

Máis adiante veremos que se dous sucesos están relacionados causalmente, entón a causa debe ser anterior que o efecto en calquera sistema, e isto nos leva a que ningún sinal pode propagarse a velocidade superior a c.

1.7. Contracción de lonxitudes

Consideremos un obxecto (unha barra) de extremos A e B. A súa lonxitude en repouso é: $L_0 = \Delta x' = x'_A - x'_B$, con $\Delta t'$ non necesariamente nula, xa que para un obxecto en repouso pódense medir x'_A e x'_B no instante que queiramos. Pero o observador que se move con respecto á barra calcula a súa lonxitude mediante $L = \Delta x = x_B - x_A$, onde agora si que x_A e x_B hanse medir no mesmo instante $\Delta t = 0$. Entón:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t) = \gamma \Delta x \qquad \Rightarrow L_0 = \gamma L$$

ou

$$L = \frac{1}{\gamma} L_0,$$

que é sempre menor que L_0. Un observador en movemento mide sempre unha lonxitude L menor que a lonxitude en repouso L_0 (*contracción de lonxitudes*). Debemos salientar que se $L' = \gamma L$ non é certo que por simetría se teña que $L = \gamma L'$, xa que se a medida é simultánea nun dos sistemas non o será no outro.

1.8. Transformación de velocidades

Da definición da velocidade en cada un dos sistemas inerciais:

$$\begin{aligned} v_x &= \lim \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \\ v'_x &= \lim \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{dx'}{dt'} \end{aligned}$$

e as transformacións de Lorentz en forma infinitesimal:

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - \beta c dt), \qquad & dt' &= \gamma(dt - \frac{\beta}{c} dx) \\ dx &= \gamma(dx' + \beta c dt'), \qquad & dt &= \gamma(dt' + \frac{\beta}{c} dx') \end{aligned}$$

obtemos a transformación das compoñentes da velocidade. Na dirección da transformación temos:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + \beta c dt')}{\gamma(dt' + \frac{\beta}{c} dx')} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + u}{1 + \frac{u}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}$$

é dicir:

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}$$

ou tamén, chamando $v_1 = u$, $v_2 = v'_x$, $v = v_x$:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

relación que se coñece comunmente como a *regra relativista de adición de velocidades*. Vemos que para $u \ll c$, $\beta \to 0$ e $v_x = u + v'_x$ que é a adición de velocidades non relativista ($v = v_1 + v_2$). Ademais, todo isto debe ser consistente co postulado de constancia da velocidade da luz. Se temos, por exemplo, $v'_x = c$,

$$v_x = \frac{c+u}{1+\frac{uc}{c^2}} = \frac{c+u}{1+\frac{u}{c}} = \frac{c+u}{\frac{1}{c}(c+u)} = c$$

de acordo co resultado de que a velocidade da luz é a mesma en calquera sistema inercial.

Analogamente, para as compoñentes transversas, resulta unha transformación non trivial, xa que a pesar de non se transformaren as coordenadas si o fan os tempos:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma(dt' + \frac{\beta}{c}dx')} = \frac{v'_y}{\gamma(1 + \frac{uv'_x}{c^2})}$$
$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma(dt' + \frac{\beta}{c}dx')} = \frac{v'_z}{\gamma(1 + \frac{uv'_x}{c^2})}$$

2. Formalismo cuadridimensional. Xeometría do espazo-tempo

2.1. Espazo-tempo cuadridimensional

Reescribamos as transformacións de Lorentz para ver que tratan de forma simétrica as variables espaciais e temporais. Chamando $x^0 = ct$, $x^1 = x_1$, estas pódense escribir:

$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1)$$
$$x^{1'} = \gamma(-\beta x^0 + x^1),$$

onde se ve manifestamente a simetría entre x^0 e x^1. Se reunimos a variable temporal xunto as tres espaciais, a transformación se pode escribir en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

que se pode escribir:

$$x^{\mu\prime} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu},$$

onde os índices toman os catro valores: $\mu, \nu = 0, ..., 3$. As transformacións de Lorentz son transformacións lineares nun espazo de catro dimensións do que os seus elementos son vectores de catro compoñentes que chamaremos *cuadrivectores*:

$$\mathbb{X} = (x^0, x^1, x^2, x^3).$$

En forma matricial:

$$\mathbb{X}' = \Lambda \cdot \mathbb{X},$$

onde

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz da transformación de Lorentz. A expresión anterior é precisamente a lei de transformación dun vector. Λ xoga o papel análogo ao dunha matriz ortogonal en tres dimensións. De feito, veremos que as transformacións de Lorentz poden entenderse como «rotacións» en catro dimensións que reservan un certo «produto escalar» e a partir de aí construiremos todo o cálculo tensorial no espazo cuadridimensional (ou *espazo de Minkowski*).

A matriz Λ ten determinante $\det\Lambda = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$, polo que se pode parametrizar:

$$\begin{aligned} \gamma &= \cosh\phi \\ \beta\gamma &= \operatorname{senh}\phi, \end{aligned}$$

é dicir:

$$\tanh\phi = \beta.$$

O parámetro ϕ chámase *rapidez (rapidity)*. Veremos nos problemas que as transformacións de Lorentz forman un grupo (o *grupo de Lorentz*):

$$\Lambda(\beta_1) \cdot \Lambda(\beta_2) = \Lambda(\beta_2) \cdot \Lambda(\beta_1) = \Lambda\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}\right),$$

ou, en termos da rapidez:

$$\Lambda(\phi_1) \cdot \Lambda(\phi_2) = \Lambda(\phi_2) \cdot \Lambda(\phi_1) = \Lambda\left(\phi_1 + \phi_2\right).$$

Chamando $\phi = i\theta$ (sendo ϕ real, θ será imaxinario), temos que $\cosh\phi = \cos\theta$ e $\operatorname{senh}\phi = i\operatorname{sen}\theta$ co cal poderiamos escribir:

$$\begin{pmatrix} ix^{0\prime} \\ x^{1\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

e dicir que a transformación de Lorentz tamén se pode considerar como unha rotación ordinaria nun plano con compoñente temporal imaxinaria (ix^0, x^1), aínda que preferimos non utilizar esta interpretación.

De todos os xeitos, o grupo de Lorentz é similar en catro dimensións ao grupo ortogonal en tres dimensións. Alí tiñamos vectores $\vec{v}$ con compoñentes v_i, $i = 1, 2, 3$, transformándose de acordo a lei $v'_i = a_{ij} v_j$, onde as compoñentes a_{ij} son as dunha matriz ortogonal que satisfai $\delta_{ij} a_{ik} a_{jl} = \delta_{kl}$, ou sexa, que preserva ou deixa invariante o produto escalar ou norma euclídeos.

No caso cuadridimensional, temos cuadrivectores $\mathbb{X} = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$ dos que as compoñentes x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$ transforman baixo Lorentz de acordo a:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

para as compoñentes contravariantes, onde a matriz Λ satisfai:

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \eta_{\rho\sigma},$$

onde $-\eta_{00} = \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$ e $\eta_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$. Dicimos que *as transformacións de Lorentz deixan invariante a métrica de Minkowski*:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ao igual que cos tensores cartesianos podemos agora clasificar as magnitudes físicas de acordo ás súas propiedades de transformación baixo o grupo de Lorentz. O produto escalar ou norma vai vir dado por:

$$\mathbb{X}^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -c^2 t^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

e

$$\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 = -c^2 t_x t_y + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$$

Estas cantidades son escalares ou invariantes Lorentz:

$$\mathbb{X}'^2 = \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = \eta_{\mu\nu} (\Lambda^\mu{}_\rho x^\rho)(\Lambda^\nu{}_\sigma x^\sigma) = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma x^\rho x^\sigma = \eta_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma = \mathbb{X}^2.$$

Tamén se pode escribir

$$\mathbb{X}'^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_\nu x^\nu,$$

onde $x_\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu$ son as compoñentes *covariantes* do cuadrivector posición:

$$x_0 = -x^0 \quad x_i = x^i \quad i = 1, 2, 3.$$

e analogamente para $\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}$.

O espazo cuadridimensional coa métrica de Minkowski chámase *espazo de Minkowski.*

Podemos definir entón escalares ou invariantes (masa, enerxía en CM), vectores (posición, momento, velocidade), tensores de segunda orde (o tensor de Maxwell do campo electromagnético, o tensor enerxía-momento), etc. O principio de relatividade afirma que todas as leis da Física deben ser igualmente válidas en calquera sistema inercial, é dicir, deben permanecer válidas despois dunha transformación de Lorentz. Unha lei da Física ten que vir daquela expresada mediante unha ecuación entre cantidades do mesmo carácter tensorial baixo transformacións de Lorentz:

$$\mathbb{A} = \mathbb{B},$$

de maneira que en outro sistema inercial calquera, a ecuación:

$$\mathbb{A}' = \mathbb{B}',$$

segue a ser certa pois ambos membros da ecuación transformanse da mesma maneira (*covarianza*).

O principio de constancia da velocidade da luz está contido na invariancia da métrica de Minkowski: se $\mathbb{X}$ representa a posición dun raio de luz emitido dende a orixe en $t = 0$, entón $\mathbb{X}^2 = -c^2t^2 + \mathbf{r}^2 = 0$, xa que $c = \frac{\|\mathbf{r}\|}{t}$. Como $\mathbb{X}'^2 = \mathbb{X}^2 = 0$, $-c^2t'^2 + \mathbf{r}'^2 = 0$ e $c = \frac{\|\mathbf{r}'\|}{t'}$, ou sexa, a velocidade da luz é independente do sistema inercial.

2.2. Intervalos

Un suceso ou acontecemento é un vector no espazo de Minkowski (espazo-tempo): $\mathbb{X}_A = (x_A^0, x_A^1, x_A^2, x_A^3)$. Dado outro suceso $\mathbb{X}_B$, definimos o *intervalo* entre eles como:

$$S_{AB}^2 = (\mathbb{X}_B - \mathbb{X}_A)^2 = \Delta\mathbb{X}^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu = -c^2\Delta t^2 + \Delta\mathbf{r}^2$$

ou tamén

$$S_{AB}^2 = -c^2\Delta t^2 + d_{AB}^2,$$

onde $d_{AB} = \|\Delta\mathbf{r}\|$ é a distancia euclídea entre as posicións espaciais dambolosdous sucesos e Δt é o intervalo temporal entre eles. Por suposto que o intervalo é un invariante de Lorentz, pero pode ser positivo, negativo ou nulo.

- $S_{AB}^2 > 0 \Rightarrow d_{AB} > c\Delta t$. O intervalo chámase de *tipo espazo (space-like)* pois os sucesos están separados por unha distancia maior da percorrida por un raio de luz no tempo Δt. Doutro xeito: a un raio de luz non lle daría tempo a conectar ambos sucesos. O caso máis claro de sucesos separados por un intervalo tipo espazo é o de sucesos simultáneos en posicións distintas, xa que $\Delta t = 0$ e $d_{AB} > 0$.

- $S_{AB}^2 = 0 \Rightarrow d_{AB} = c\Delta t$. O intervalo chámase de *tipo luz (light-like)* pois os sucesos están separados por unha distancia exactamente igual á percorrida por un raio de luz no tempo Δt. Un raio de luz pode conectar ambos sucesos.

- $S_{AB}^2 < 0 \Rightarrow d_{AB} < c\Delta t$. O intervalo chámase de *tipo tempo (time-like)* pois os sucesos están separados por unha distancia máis pequena da percorrida por un raio de luz no tempo Δt. O caso máis claro de sucesos separados por un intervalo tipo tempo é o de sucesos colocais en instantes distintos, xa que $\Delta t > 0$ e $d_{AB} = 0$.

2.3. O cono de luz. Diagramas de Minkowski

Graficamente, se colocamos o suceso A na orixe e representamos o espazo de Minkowski (só o plano x^0x^1), vemos que o lugar xeométrico dos sucesos tipo luz respecto de A son as liñas: $x^2 = c^2t^2 \Rightarrow x = \pm ct$, que son as traxectorias de raios de luz propagándose cara á dereita ou á esquerda. Ao incluír as outras dimensións no gráfico trataríase en realidade dun cono: o *cono de luz (light-cone)*.

Os sucesos tipo tempo estarían no interior do cono ($x^2 < c^2t^2$), mentres que os de tipo espazo estarían no exterior ($x^2 > c^2t^2$). O eixo temporal é o eixo vertical (o futuro vai cara arriba, o pasado cara abaixo).

As traxectorias das partículas materiais chámanse *liñas de universo (world-lines)* e se a súa velocidade é inferior á da luz, deben estar sempre contidas no seu propio cono de luz en cada punto (a pendente da curva non pode ser nunca tal que $\frac{x}{t} > c$). Este tipo de diagramas representando procesos no espazo-tempo son os chamados *diagramas de Minkowski.*

Vexamos como se interpreta graficamente unha transformación de Lorentz nun diagrama de Minkowski. Dada a transformación:

$$x^{0\prime} = \gamma(x^0 - \beta x^1)$$
$$x^{1\prime} = \gamma(-\beta x^0 + x^1),$$

o cono de luz é invariante, xa que

$$x^{0\prime} = \pm x^{1\prime} \Rightarrow \gamma(x^0 - \beta x^1) = \gamma(-\beta x^0 + x^1) \Rightarrow (1 \pm \beta) x^0 = (1 \mp \beta) x^1 \Rightarrow x^0 = \pm x^1.$$

Ademais, o eixo $x^{0\prime}$ vén definido polo lugar xeométrico dos puntos con $x^{1\prime} = 0$, ou sexa $x^1 = \beta x^0 \Rightarrow x^0 = \frac{1}{\beta} x^1$, que é unha recta de pendente $\frac{1}{\beta} > 1$. Analogamente, o eixo $x^{1\prime}$ está formado polos puntos con $x^{0\prime} = 0$, ou sexa $x^0 = \beta x^1$, que é unha recta de pendente $\beta < 1$. Podería dicirse que os novos eixos obtéñense «pechando» co mesmo ángulo os eixos orixinais sobre o cono de luz, que seguirá formando a bisectriz entre os eixos ao ser invariante.

Podemos enunciar agora o seguinte

Teorema: Para dous sucesos A e B:

1. Se $S^2_{AB} < 0$ (tipo tempo), existe unha transformación de Lorentz que converte A e B en colocais.
2. Se $S^2_{AB} > 0$ (tipo espazo), existe unha transformación de Lorentz que converte A e B en simultáneos.

A demostración é sinxela. Situemos A na orixe e sexa $B = (x^0, x^1)$. Restrinxímonos ao primeiro cuadrante no diagrama, $x^0, x^1 > 0$.

1. $S^2_{AB} < 0 \Rightarrow -(x^0)^2 + (x^1)^2 < 0 \Rightarrow x^1 < x^0$. Abonda tomar a transformación con $\beta = \frac{x^1}{x^0} < 1$ e entón $x^{1\prime} = 0$ e os sucesos son colocais.
2. $S^2_{AB} > 0 \Rightarrow -(x^0)^2 + (x^1)^2 > 0 \Rightarrow x^0 < x^1$. Tomando $\beta = \frac{x^0}{x^1} < 1$ teremos $x^{0\prime} = 0$ e os sucesos son simultáneos no novo sistema.

Graficamente:

De feito satisfaise estoutro importante teorema:

Teorema: Se B esta fóra do cono de luz de A, entón son certas as tres afirmacións seguintes:

1. Existe un sistema S no que B sucede despois que A ($x^0 > 0$)
2. Existe un sistema S' no que A e B son simultáneos ($x^0 = 0$)
3. Existe un sistema S'' no que B sucede antes que A ($x^0 < 0$)

Demostración: dende logo, unha das tres posibilidades debe ser certa. Sexa esta a primeira, ($x^0 > 0$). Como B esta fóra do cono de luz, e de acordo co teorema anterior, a transformación con $\beta = \frac{x^0}{x^1} < 1$ fai $x^{0\prime} = 0$ e os sucesos son simultáneos no S'. Ademais, como $\frac{x^0}{x^1} < 1$, existe outro β tal que $\frac{x^0}{x^1} < \beta < 1$. Tomando este β, a transformación de Lorentz lévanos a un S'' onde $x^{0\prime\prime} = 0$.

En conclusión: se A e B están relacionados causalmente, teñen que estar dentro dos seus conos de luz, xa que a causa debe anteceder sempre ao efecto para calquera observador en calquera sistema inercial, e non é posible que existan á vez os tres sistemas do enunciado. Dito doutro xeito, *a causalidade propágase a velocidade inferior ou igual á velocidade da luz.*

3. Mecánica relativista

3.1. Tempo propio

Como vimos anteriormente, os postulados da relatividade impoñen que as ecuacións do movemento deban poder escribirse de xeito covariante, é dicir, mediante relacións que involucran cantidades con propiedades ben definidas baixo transformacións de Lorentz: escalares ou invariantes (cuadri)vectores, tensores, etc.

Para describir a posición podemos utilizar o cuadrivector $\mathbb{X}$ con compoñentes x^μ.

Para a velocidade non podemos tomar $\frac{dx^\mu}{dt}$, xa que dt non é un escalar, senón unha compoñente do vector $d\mathbb{X}$. Para obter un cuadrivector velocidade necesitamos un invariante con dimensións de tempo.

Isto non é difícil, xa que o intervalo infinitesimal

$$ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu} = \sqrt{-c^2 dt^2 + d\mathbf{r}^2}$$

é un invariante. Entón, a cantidade

$$d\tau^2 \equiv -\frac{ds^2}{c^2} = dt^2 - \frac{1}{c^2} d\mathbf{r}^2$$

tamén é un invariante con dimensións de T^2. A raíz cadrada desa cantidade:

$$d\tau = \frac{i}{c} ds = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2} d\mathbf{r}^2}$$

denomínase *tempo propio*, que é o invariante que utilizaremos para construír os cuadrivectores velocidade e aceleración. Sacando factor común dt^2 na expresión anterior:

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\frac{d\mathbf{r}^2}{dt^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}.$$

Finalmente obtemos que

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}$$

que é xustamente o resultado que obtivemos para a dilatación temporal. O tempo propio $d\tau$ representa o *intervalo infinitesimal de tempo medido no sistema no que unha partícula está en repouso*, mentres que dt é o tempo no sistema estacionario, con respecto ao cal a partícula se move con velocidade $\mathbf{v}$.

3.2. Velocidade e aceleración

Podemos agora definir un *cuadrivector velocidade* $\mathbb{V}$ con compoñentes:

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma\frac{dx^\mu}{dt},$$

$$\mathbb{V} = (v^0, \mathbf{v}_{\mathrm{rel}}) = \gamma\frac{d}{dt}(ct, \mathbf{r}) = \gamma(c, \frac{d\mathbf{r}}{dt}) = \gamma(c, \mathbf{v}).$$

,

$$v^0 = \gamma c \quad \mathbf{v}_{\mathrm{rel}} = \gamma\mathbf{v}.$$

O cadrado deste cuadrivector:

$$\mathbb{V}^2 = \eta_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = v_\nu v^\nu = \gamma^2(-c^2 + \mathbf{v}^2) = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}(-c^2 + v^2) = -c^2$$

é naturalmente un invariante.

Similarmente podemos definir un *cuadrivector aceleración* con compoñentes dadas por:

$$a^\mu = \frac{dv^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}.$$

Como $v_\nu v^\nu = -c^2$, derivando respecto de τ obtemos que $v_\nu a^\nu = 0$ e a 4-velocidade e 4-aceleración son «perpendiculares».

3.3. Momento

Na mecánica newtoniana $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Imos xeneralizar esta expresión de xeito covariante. Para isto definimos:

$$p^\mu = mv^\mu,$$

onde m é un invariante con dimensión de masa;

$$\mathbb{P} = (p^0, \mathbf{p}_{\text{rel}}) = m\gamma(c, \mathbf{v}) = (m\gamma c, m\gamma\mathbf{v})$$

$$\mathbb{P}^2 = m^2\mathbb{V}^2 = -m^2c^2.$$

A compoñente espacial de $\mathbb{P}$ é $\mathbf{p}_{\text{rel}} = \gamma\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} = m(v)\mathbf{v}$, con

$$m(v) = m\gamma = \frac{m}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Esta cantidade $m(v)$ chámase ás veces *masa relativista* ou *masa dependente da velocidade*, sendo $m = m(v = 0)$ a *masa en repouso*, que é unha cantidade invariante e será a única masa que utilizaremos. Escribiremos sempre explicitamente $m\gamma$.

A compoñente temporal do cuadrimomento $p^0 \equiv \frac{E}{c}$ define $E = m\gamma c^2$. Veremos máis adiante que E é a enerxía total da partícula.

Con esta definición do momento, pode verse que a conservación do mesmo é compatible coas transformacións de Lorentz. A definición clásica $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ implica que se $\mathbf{p}$ se conserva nun sistema S, non necesariamente se conserva noutro sistema S' relacionado por unha transformación de Lorentz, mentres que coa definición relativista si o fai. A lei de conservación axeitada será agora a do cuadrimomento, que é unha lei covariante:

$$\sum \mathbb{P}_{\text{in}} = \sum \mathbb{P}_{\text{fin}}$$

As compoñentes espaciais desta expresión dan a conservación do trimomento relativista e a compoñente temporal é outra lei de conservación que identificaremos coa da enerxía.

3.4. Forza e enerxía

A xeneralización natural sería definir un cuadrivector forza

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{d(mu^\mu)}{d\tau}$$

$$\mathbb{F} = (F^0, \mathbf{F}_{\text{rel}}) = \frac{d}{d\tau}\mathbb{P} = \frac{d}{d\tau}(m\gamma c, m\gamma\mathbf{v}) = \gamma\frac{d}{dt}(m\gamma c, m\gamma\mathbf{v})$$

es as compoñentes espaciais serían, seguindo a analoxía co caso da velocidade e o momento:

$$\mathbf{F}_{\text{rel}} = \gamma\mathbf{F} = \gamma\frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v}),$$

co que poderiamos escribir as ecuacións do movemento como:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v}),$$

onde $\mathbf{F}$ e $\mathbf{v}$ son os 3-vectores ordinarios. Neste caso non se adoita utilizar a expresión covariante.

O traballo realizado polas forzas sobre unha partícula que se move entre dous puntos 1 e 2:

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 dT = T_2 - T_1 = T$$

é igual á enerxía cinética que adquire T. Introducimos a expresión de máis arriba para a forza relativista e supoñemos que a partícula parte do repouso para calcular a integral:

$$W_{12} = T = \int_1^2 \frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}dt = m\int_0^{\mathbf{v}} \mathbf{v} \cdot d(\gamma\mathbf{v}).$$

Integrando por partes:

$$T = m\gamma\mathbf{v}^2 - m\int_0^{\mathbf{v}} \gamma\mathbf{v}d\mathbf{v} = m\gamma v^2 - m\int_0^{v^2} \frac{\frac{1}{2}dv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Esta integral é inmediata, polo que:

$$\begin{aligned} T = m\gamma v^2 + mc^2 \left[\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right]\Bigg|_0^v &= m\gamma v^2 + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - mc^2 = \\ &= m\gamma v^2 + \frac{mc^2}{\gamma} - mc^2 = m\gamma\left[v^2 + \frac{c^2}{\gamma^2}\right] - mc^2 = \\ &= m\gamma\left[v^2 + c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right] - mc^2 = m\gamma c^2 - mc^2. \end{aligned}$$

Esta é a expresión relativista para a enerxía cinética:

$$T = m(\gamma - 1) = m\gamma c^2 - mc^2.$$

Para velocidades $v \ll c$, podemos expandir o factor de Lorentz, γ en serie de Taylor:

$$T = m\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + ...\right)c^2 - mc^2 \approx \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + ...,$$

coincidindo co resultado non relativista no límite $v \ll c$.

Se reescribimos a expresión de T como $m\gamma c^2 = T + mc^2$, chamaremos a

$$E = m\gamma c^2 = E_0 + T$$

a *enerxía total*, onde

$$E_0 = mc^2$$

é o valor de E para $v = 0$, $\gamma = 1$, a *enerxía en repouso*, e recuperamos o coñecido resultado para a conservación da masa-enerxía.

Se volvemos á expresión do cuadrimomento, vemos que a súa compoñente temporal é xustamente a enerxía:

$$p^0 = m\gamma c = \frac{E}{c} \Rightarrow \mathbb{P} = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right).$$

Momento e enerxía están ligados de xeito similar a como o están espazo e tempo, formando parte dun mesmo cuadrivector. A conservación do momento e da enerxía xa non son cousas separadas (conservación do cuadrimomento).

O cadrado de $\mathbb{P}$ vimos anteriormente que era un invariante $\mathbb{P}^2 = -m^2c^2$, polo que:

$$\mathbb{P}^2 = -m^2c^2 = -\left(\frac{E}{c}\right)^2 + \mathbf{p}^2 \Rightarrow -m^2c^2 = -\frac{E^2}{c^2} + p^2,$$

de onde se obtén a relación relativista entre o momento e a enerxía, a *relación de dispersión*:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

3.4.1. Exemplo: partícula sometida a unha forza constante

Resolvamos a ecuación do movemento para unha partícula de masa m que se atopa en repouso na orixe en $t = 0$ sobre a que actúa unha forza constante F. A ecuación do movemento vai ser:

$$F = \frac{d}{dt}(m\gamma v).$$

Como F é constante, podemos integrar trivialmente (con $v_0 = 0$):

$$Ft = m\gamma v = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

e, despexando a velocidade:

$$v(t) = \frac{\frac{F}{m}t}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}}.$$

Vemos que para $t \to 0$, $v \to \frac{F}{m}t$, como corresponde ao movemento uniformemente acelerado. Porén, sabemos que a velocidade non pode aumentar indefinidamente, pois existe unha cota superior, c. Efectivamente, para $t \to \infty$, o termo linear no tempo domina baixo a raíz cadrada e $v \to c$, de acordo cos postulados da relatividade.

A expresión da velocidade pode integrarse de novo con respecto ao tempo sen moita dificultade, obténdose:

$$x(t) = \int_0^t \frac{\frac{F}{m}t}{\sqrt{1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}}dt = \frac{mc^2}{F}\left[\sqrt{1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} - 1\right]$$

Comprobamos que para $t \to 0$:

$$x(t) = \frac{mc^2}{F}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2 + \cdots - 1\right] = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + \ldots,$$

pero para $t \to \infty$ o movemento faise asintóticamente uniforme e $x(t) \to ct$.

3.4.2. Exemplo: enerxía e momento dun electrón

A enerxía en repouso dun electrón é 0,5 MeV:

$$E_0 = mc^2 = 0{,}5\text{MeV},$$

polo que a súa masa é:

$$m = 0{,}5\frac{\text{MeV}}{c^2} = 9 \times 10^{-31}\text{ kg}.$$

Supoñamos que o electrón ten unha enerxía cinética de 0,8 MeV. Calculemos a súa enerxía total, momento e velocidade. A enerxía total é $E = mc^2 + T =$ 1,3 MeV. Ademais, usando a relación de dispersión relativista $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$:

$$pc = \sqrt{E^2 - m^2c^4} = 1{,}2\text{MeV}$$

e, xa que logo

$$p = 1{,}2\frac{\text{MeV}}{c}$$

Ademais, como $\beta = \frac{v}{c} = \frac{p}{m\gamma c} = \frac{p}{E/c} = \frac{pc}{E}$,

$$\beta = \frac{1{,}2\text{MeV}}{1{,}3\text{MeV}} = 0{,}92 \Rightarrow v = 0{,}92c$$

3.5. Partículas sen masa: o fotón

Na mecánica non relativista $p = mv$, $T = \frac{1}{2}mv^2$, polo que unha partícula con $m = 0$ non terá nin momento nin enerxía. Non obstante, en relatividade $p = m\gamma v$ e $E = m\gamma c^2$, polo que $\beta = \frac{v}{c} = \frac{pc}{E}$, independentemente da masa. Na relación de dispersión relativista podemos poñer $m = 0$ e obtemos

$$E = pc,$$

e polo tanto

$$\beta = 1 \Rightarrow v = c,$$

indicando que *as partículas sen masa viaxan á velocidade da luz.* As expresións relativistas do momento e a enerxía serían entón indeterminacións do tipo $0 \cdot \infty$, pero non hai ningunha contradición no feito de que existan partículas que aínda con masa nula teñen momento e enerxía finitos, sempre que se movan a $v = c$. O cuadrivector momento é en xeral de tipo tempo, como corresponde á propagación dunha partícula con masa: $\mathbb{P}^2 = -m^2c^2$. En cambio, para unha partícula sen masa, o cuadrimomento é de tipo luz: $\mathbb{P}^2 = 0$.

A existencia de partículas sen masa movéndose á velocidade da luz con momento e enerxía non nulas está apoiada pola mecánica cuántica. Segundo Planck e Einstein, os fotóns teñen enerxía

$$E = \hbar\omega = h\nu$$

e momento

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k},$$

que se poden reunir nun cuadrivector $\mathbb{P} = \hbar(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k})$, onde h é a constante de Planck e $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. En función da lonxitude de onda, $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$. Esta é a relación de de Broglie entre o momento dunha partícula e a lonxitude da súa onda cuántica asociada, válida para fotóns pero tamén para calquera outra partícula, teña masa ou non.

3.6. Cinemática relativista de colisións

En experimentos de Física de Altas Enerxías considéranse colisións entre partículas onde as interaccións son, dende logo, complexas e de natureza cuántica. Non obstante, cando as partículas que participan na reacción están lonxe da rexión de interacción o seu movemento pode describirse mediante a Mecánica Clásica. Esta descrición deberá ser, dadas as velocidades ás que se moven estas partículas, relativista.

De todos os xeitos, o principio fundamental que intervén é válido clásica e cuanticamente: a conservación do momento-enerxía (cuadrimomento):

$$\sum \mathbb{P}_{\text{inic}} = \sum \mathbb{P}_{\text{fin}}$$

As relacións entre as cantidades relevantes cando cambiamos de sistema inercial (tipicamente LAB e CM) obteranse a partir das transformacións de Lorentz. O sistema CM defínese como aquel no cal o 3-momento total é nulo: $\mathbf{p}' = \sum_i \mathbf{p}'_i = 0$. O cuadrivector momento en CM será entón $\mathbb{P}' = (p'_0, \mathbf{0}) = (\frac{E'}{c}, \mathbf{0})$ e como o seu cadrado $\mathbb{P}'^2 = -\frac{E'}{c}$ é un invariante, *a enerxía total no sistema CM, E', é un invariante de Lorentz.*

A conservación do cuadrimomento implica automaticamente a conservación do momento e da enerxía e está garantido por covarianza que se se satisfai nun sistema inercial tamén o fai en calquera outro.

A conservación da enerxía relativista equivale no caso $v \ll c$ á conservación da enerxía cinética, $E = m\gamma c^2 \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$, xa que a masa non varía.

$$E_i = E_f \Rightarrow T_i = T_f$$

No caso relativista, a masa pode transformarse en enerxía e viceversa. Isto fai que incluso en procesos inelásticos, a enerxía relativista siga a conservarse, xa que as variacións de enerxía cinética se compensan con variacións de masa, como se comproba experimentalmente.

Os ingredientes fundamentais son daquela:

- Conservación do cuadrimomento (enerxía-momento), incluso en colisións inelásticas.
- Transformacións de Lorentz (CM $\leftrightarrow$ LAB)
- Construción de invariantes Lorentz (escalares) que teñen o mesmo valor en todos os sistemas inerciais.

Isto fai que os resultados relativistas sexan obtidos moitas veces máis doadamente que os non relativistas.

3.6.1. Exemplo: scattering Compton

O scattering Compton consiste na colisión dun fotón sobre un electrón en repouso. O fotón sae desviado un ángulo ϕ. A súa enerxía final pode calcularse en función da enerxía inicial:

$$\gamma_1 + e^- \longrightarrow \gamma_2 + e^-$$

Denotamos con $\mathbb{P}$ os momentos das partículas antes da colisión e con $\mathbb{Q}$ os momentos despois da mesma. Estes son:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\gamma_1} &= (\frac{E_1}{c}, \mathbf{p}_1), \quad \mathbb{P}^2_{\gamma_1} = 0 \Rightarrow p_1 = \|\mathbf{p}_1\| = \frac{E_1}{c} \\
\mathbb{P}_{e^-} &= (mc, \mathbf{0}), \quad \mathbb{P}^2_{e^-} = -m^2c^2 \quad \text{(en repouso)} \\
\mathbb{Q}_{\gamma_2} &= (\frac{E_2}{c}, \mathbf{q}_2), \quad \mathbb{Q}^2_{\gamma_2} = 0 \Rightarrow q_2 = \|\mathbf{q}_2\| = \frac{E_2}{c} \\
\mathbb{Q}_{e^-} &= (\frac{E_e}{c}, \mathbf{q}_e), \quad \mathbb{Q}^2_{e^-} = -m^2c^2
\end{aligned}$$

A conservación do cuadrimomento escríbese:

$$\mathbb{P}_{\gamma_1} + \mathbb{P}_{e^-} = \mathbb{Q}_{\gamma_2} + \mathbb{Q}_{e^-},$$

de onde podemos despexar $\mathbb{Q}_{e^-}$ e elevar ao cadrado:

$$\mathbb{Q}_{e^-} = \mathbb{P}_{\gamma_1} + \mathbb{P}_{e^-} - \mathbb{Q}_{\gamma_2}$$

$$\mathbb{Q}^2_{e^-} = \mathbb{P}^2_{\gamma_1} + \mathbb{P}^2_{e^-} + \mathbb{Q}^2_{\gamma_2} + 2\,\mathbb{P}_{\gamma_1}\cdot\mathbb{P}_{e^-} - 2\,\mathbb{P}_{\gamma_1}\cdot\mathbb{Q}_{\gamma_2} - 2\,\mathbb{P}_{e^-}\cdot\mathbb{Q}_{\gamma_2},$$

de onde

$$-m^2c^2 = 0 - m^2c^2 + 0 +$$
$$+2\left[-\frac{E_1}{c}mc + \mathbf{0}\right] - 2\left[-\frac{E_1E_2}{c^2} + \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{q}_2\right] - 2\left[-mc\frac{E_2}{c} + \mathbf{0}\right],$$

e, usando que

$$\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{q}_2 = \|\mathbf{p}_1\|\|\mathbf{q}_2\|\cos\phi = \frac{E_1E_2}{c^2}\cos\phi$$

e despexando, temos a expresión para a perda de enerxía que sofre o fotón:

$$E_2 - E_1 = -\frac{E_1E_2}{mc^2}(1-\cos\phi) < 0.$$

Tendo en conta que para o fotón $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$, a expresión anterior pode poñerse:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1-\cos\phi) > 0,$$

que dá o aumento da lonxitude de onda Compton.

3.6.2. Exemplo: enerxía limiar

En procesos de colisións é importante o concepto de enerxía limiar ou enerxía mínima das partículas iniciais para que unha reacción poida ter lugar, por exemplo:

$$a + b \longrightarrow c + d.$$

O habitual é que unha das partículas iniciais (p.ex. b) estea en repouso (no sistema LAB) e queiramos calcular a mínima enerxía que debe ter a para que sexa posible a reacción.

A mínima enerxía das partículas finais é a súa enerxía en repouso (o resto é cinética) e esa sería a enerxía limiar. Só no sistema CM se pode acadar dita enerxía, xa que é o único onde todas as partículas poidan estar en repouso, ao ser o momento total nulo:

$$E' \geq (m_c + m_d)c^2.$$

En calquera outro sistema inercial, dado que $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, se $p \neq 0$, entón $E > (m_c + m_d)c^2$.

No noso caso temos, no sistema CM:

$$\mathbb{P}' = \mathbb{P}'_a + \mathbb{P}'_b; \quad (\frac{E'}{c}, 0) = (\frac{E'_a}{c}, \mathbf{p}') + (\frac{E'_b}{c}, -\mathbf{p}').$$

E no sistema LAB:

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_a + \mathbb{P}_b = (\frac{E_a}{c}, \mathbf{p}_a) + (\frac{E_b}{c}, \mathbf{0}).$$

Usando a invarianza Lorentz:

$$\mathbb{P}'^2 = \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}_a^2 + \mathbb{P}_b^2 + 2\, \mathbb{P}_a \cdot \mathbb{P}_b$$

Isto implica que:

$$E'^2 = m_a^2 c^4 + m_b^2 c^4 + 2 E_a m_b c^2.$$

A enerxía limiar de a, $E_a|_{\text{mín}}$ é para $E' = m_c c^2 + m_d c^2$, e polo tanto

$$E_a|_{\text{mín}} = \frac{(m_c + m_d)^2 c^4 - m_a^2 c^4 - m_b^2 c^4}{2 m_b c^2} = \frac{(m_c + m_d)^2 - m_a^2 - m_b^2}{2 m_b} c^2$$

3.7. Formulación lagrangiana e hamiltoniana

Para formular a relatividade especial dende o punto de vista lagrangiano, necesitamos unha acción. Esta debe ser unha integral curvilínea, ao longo da traxectoria dunha partícula, dunha cantidade escalar ou invariante. Para unha partícula libre, o único invariante de que dispoñemos para integrar é o elemento de tempo propio $d\tau$, polo que escribimos:

$$S = \alpha \int_1^2 d\tau,$$

onde α é unha constante a determinar coas dimensións axeitadas.

$$S = \alpha \int_1^2 \frac{1}{\gamma} dt = \alpha \int_1^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int_1^2 L dt,$$

onde a lagrangiana para unha partícula relativista L é:

$$L = \alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Para $v \ll c$,

$$L \approx \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + ... \right) = \text{cte} - \alpha \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + ...$$

e fixamos α da condición de que a lagrangiana coincida coa dunha partícula libre no caso non relativista, salvo unha constante:

$$-\alpha \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \alpha = -mc^2,$$

co cal xa temos a lagrangiana relativista dunha partícula libre:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = -\frac{mc^2}{\gamma}.$$

O momento canónico conxugado á posición é

$$p = \frac{\partial L}{\partial v} = -mc^2\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{2v}{c^2}\right) = m\gamma v,$$

como agardabamos.

Dado que a lagrangiana non depende do tempo explicitamente, a hamiltoniana é unha constante do movemento, que ademais debe coincidir coa enerxía. Efectivamente:

$$H = pv - L = m\gamma v^2 + \frac{mc^2}{\gamma} = m\gamma c^2 = mc^2 + T = E.$$

Para expresar a función H en función do momento, basta usar a relación de dispersión:

$$H = E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4},$$

e para partículas sen masa

$$H = E = pc.$$

No caso de termos forzas externas conservativas, simplemente haberá que engadir o correspondente potencial V:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - V = -\frac{mc^2}{\gamma} - V$$

$$H = E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + V.$$

Por exemplo, para unha partícula nun potencial central:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - V(r) = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}{c^2}} + \frac{k}{r},$$

de onde se obteñen as ecuacións relativistas das órbitas.